

Einführung in die Quantentheorie

Hausübung, Blatt 2

SoSe 2024

Abgabe: 14.04.2024

[H4] Messwerte einer Messapparatur (3 Punkte)

Einer Messapparatur entspreche in der $\{|x\rangle, |y\rangle\}$ -Basis die Matrix

$$A \doteq \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2(1-i) \\ 2(1+i) & -1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Welche Messwerte a sind möglich? Man bestimme die zugehörigen (normierten) Eigenzustände $|\phi_a\rangle$.
- (b) Mit welchen Wahrscheinlichkeiten W_a werden die Werte a erhalten, wenn sich das System unmittelbar vor der Messung im Zustand

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (i|x\rangle + |y\rangle)$$

befindet?

- (c) Berechnen Sie bezüglich $|\psi\rangle$ den mittleren Messwert $\langle A \rangle$ und die Schwankung ΔA , wobei $(\Delta A)^2 = \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle$.

[H5] Kommutierende Operatoren (4 Punkte)

In einem dreidimensionalen komplexen Hilbertraum \mathcal{H} seien zwei Operatoren durch ihre Wirkung auf die Vektoren der orthonormierten Basis $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle\}$ folgendermaßen definiert

$$\begin{aligned} A|e_1\rangle &= 3|e_1\rangle - i\sqrt{2}|e_2\rangle + |e_3\rangle, & B|e_1\rangle &= |e_1\rangle + i\sqrt{2}|e_2\rangle + |e_3\rangle, \\ A|e_2\rangle &= i\sqrt{2}|e_1\rangle + 2|e_2\rangle - i\sqrt{2}|e_3\rangle, & B|e_2\rangle &= -i\sqrt{2}|e_1\rangle + i\sqrt{2}|e_3\rangle, \\ A|e_3\rangle &= |e_1\rangle + i\sqrt{2}|e_2\rangle + 3|e_3\rangle, & B|e_3\rangle &= |e_1\rangle - i\sqrt{2}|e_2\rangle + |e_3\rangle, \end{aligned}$$

- (a) Man gebe die den Operatoren A und B bzgl. dieser Basis zugeordneten Matrizen an.
- (b) Zeigen Sie, dass die Operatoren A und B hermitesch sind und dass sie miteinander kommutieren.
- (c) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A und B , deren Vielfachheiten sowie eine Orthonormalbasis $\{|f_1\rangle, |f_2\rangle, |f_3\rangle\}$ simultaner Eigenzustände von A und B .
Hinweis: Betrachten Sie das Eigenwertproblem zu A . Bestimmen Sie zuerst den Eigenvektor $|f_1\rangle$ zum einfachen Eigenwert. Ein Eigenvektor zum doppelten Eigenwert lautet $|f_2\rangle = \frac{1}{2} (|e_1\rangle - i\sqrt{2}|e_2\rangle - |e_3\rangle)$. Konstruieren Sie den dritten Eigenvektor orthogonal zu $|f_1\rangle$ und $|f_2\rangle$.
- (d) Welche Matrizen sind A und B bzgl. der Basis $\{|f_1\rangle, |f_2\rangle, |f_3\rangle\}$ zugeordnet?

[H6] Dichtematrix für einen teilweise polarisierten Lichtstrahl (3 Punkte)

Man betrachte einen teilweise polarisierten Lichtstrahl. Es seien p_R und p_L der Anteil der rechtspolarisierten bzw. linkspolarisierten Photonen.

- (a) Wie lautet die Dichtematrix in der Basis $\{|R\rangle, |L\rangle\}$?
- (b) Wie lautet die Dichtematrix in der Basis $\{|x\rangle, |y\rangle\}$?
- (c) Man überprüfe $\rho^2 \neq \rho$ und $\text{tr}\rho^2 < 1$.